ΘΕΜΑ 2ο

Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, της οποίας η εικόνα βρίσκεται πάνω σε μία σφαίρα κέντρου p και ακτίνας R. Εάν $k>0$ είναι η καμπυλότητα και $\tau \neq 0$ η στρέψη της c, τότε να αποδείξετε ότι

i) $c - p = -\frac{1}{k}\vec{n} - \left(\frac{1}{k}\right)^{\circ} \cdot \frac{1}{\tau}\vec{b}$

ii) $R^2 = \left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\left(\frac{1}{k}\right)^{\circ} \cdot \frac{1}{\tau}\right)^2$

iii) $\frac{\tau}{k} = \left(\left(\frac{1}{k}\right)^{\circ} \cdot \frac{1}{\tau}\right)^{\circ}$

ΛΥΣΗ

i) Η καμπύλη c είναι σφαιρική έτσι, έχουμε την ιδιότητα:

$\|c-p\| = R \Rightarrow \langle c-p, c-p \rangle = R^2 \Rightarrow \langle c-p, c-p \rangle^{\circ} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle \dot{c}, c-p \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{t}, c-p \rangle = 0 \Rightarrow c-p \perp \vec{t}$

Άρα, για κάθε $s \in I$ το $c-p$ ανήκει στο επίπεδο των $\vec{n}, \vec{b}$

Συνεπώς, $\exists\, \lambda = \lambda(s),\ \mu = \mu(s)$ συναρτήσεις τ/ω:

$c - p = \lambda \cdot \vec{n} + \mu \cdot \vec{b}, \quad \forall s \in I \quad ⊛$

Και συνέχεια, διαφορίζουμε τη σχέση $\langle \vec{t}, c-p \rangle = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle \dot{\vec{t}}, c-p \rangle + \cancel{\langle \vec{t}, \vec{t} \rangle}^{1} = 0 \Rightarrow \langle \dot{\vec{t}}, c-p \rangle = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle \dot{\vec{t}}, \lambda\vec{n} + \mu\vec{b} \rangle = -1 \underset{\text{Frenet}}{\overset{k>0}{\Rightarrow}} k\langle \vec{n}, \lambda\vec{n} + \mu\vec{b} \rangle = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{k}$.

Τότε, η ⊛ μετασχηματίζεται σε:

$c - p = -\frac{1}{k}\vec{n} + \mu\vec{b}$ και παραγωγίζουμε

$\dot{c} = -\left(\frac{1}{k}\right)^{\circ}\vec{n} - \frac{1}{k}\dot{\vec{n}} + \dot{\mu}\vec{b} + \mu \cdot \dot{\vec{b}} \Rightarrow$

$\underset{\text{Frenet}}{\overset{k>0}{\Rightarrow}} \vec{t} = -\left(\frac{1}{k}\right)^{\circ}\vec{n} - \frac{1}{k}\left(-k\vec{t} + \tau\vec{b}\right) + \dot{\mu}\vec{b} + \mu\left(-\tau\vec{n}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{t} = \vec{t} + \left(-\left(\frac{1}{k}\right)^{\circ} - \mu\tau\right)\vec{n} + \left(-\frac{\tau}{k} + \dot{\mu}\right)\vec{b} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu\tau = -\left(\frac{1}{k}\right)^{\circ} \Rightarrow \mu = -\left(\frac{1}{k}\right)^{\circ}\frac{1}{\tau} \quad ① \\ \mathring{\mu} = \frac{\tau}{k} \end{cases}$$

Άρα, αντικαθιστώντας και την ① στην ⊛ προκύπτει το ζητούμενο

ii) $R^2 = \langle c-p, c-p \rangle \overset{(i)}{=} \langle -\frac{1}{k}\vec{n} - \left(\frac{1}{k}\right)^{\circ}\frac{1}{\tau}\vec{b}, -\frac{1}{k}\vec{n} - \left(\frac{1}{k}\right)^{\circ}\frac{1}{\tau}\vec{b} \rangle =$

$= \frac{1}{k^2}\langle \vec{n},\vec{n} \rangle + 2\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}\right)^{\circ}\frac{1}{\tau}\langle \vec{n},\vec{b} \rangle + \left(\left(\frac{1}{k}\right)^{\circ}\right)^2 \frac{1}{\tau^2}\langle \vec{b},\vec{b} \rangle =$

$= \frac{1}{k^2} + \left(\left(\frac{1}{k}\right)^{\circ}\right)^2 \frac{1}{\tau^2} = \left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\left(\frac{1}{k}\right)^{\circ}\cdot\frac{1}{\tau}\right)^2 . \quad ②$

iii) Παραγωγίζουμε την ②.

$0 = 2\frac{1}{k}\cdot\left(\frac{1}{k}\right)^{\circ} + 2\left(\frac{1}{k}\right)^{\circ}\cdot\frac{1}{\tau}\cdot\left(\left(\frac{1}{k}\right)^{\circ}\cdot\left(\frac{1}{\tau}\right)\right)^{\circ} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{k} = -\frac{1}{\tau}\left(\left(\frac{1}{k}\right)^{\circ}\cdot\left(\frac{1}{\tau}\right)\right)^{\circ}$.

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω καμπύλη $C: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με φυσική παράμετρο το μήκος του τόξου και έστω η καμπύλη $C_\sigma : [a,b] \subset I \to \mathbb{R}^2$, $\sigma \in \mathbb{R}$ (η παράλληλη καμπύλη της C κατά σ) τέτοια ώστε $C_\sigma(s) = C(s) + \sigma \cdot \vec{n}(s)$.

i) Νδο για μικρό σ η καμπύλη C_σ είναι κανονική

ii) Ποια η καμπυλότητα της C_σ;

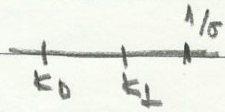
ΛΥΣΗ

i) $$\frac{dC_\sigma}{ds} = \dot{c}(s) + \sigma \dot{\vec{n}}(s) = \vec{t}(s) + \sigma k(s) \vec{t}(s) = (1-\sigma k(s)) \vec{t}(s)$$

Η C_σ όχι κανονική για $k(s) = \frac{1}{\sigma}$

Έτσι, επιδιώκουμε να την κάνουμε κανονική

Όπως k συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]$ θα έχει max και min έστω αυτά k_1 και k_0



Έτσι, επιλέγουμε το $\frac{1}{\sigma} > k_1 \Rightarrow 1 - \sigma k(s) > 0$

ii) Εάν υποθέσουμε τώρα ότι η C_σ κανονική για $1-\sigma k(s) > 0 \Leftrightarrow k(s) < \frac{1}{\sigma}$, τότε:

$\left\| \frac{dC_\sigma}{ds} \right\| = 1 - \sigma k(s)$: όπου αυτή η ποσότητα δεν είναι πάντοτε 1.

Άρα, η C_σ δεν έχει φυσική παράμετρο το s

$$S_\sigma = \int_{s_0}^{s} \left\| \frac{dC_\sigma}{ds} \right\| du = \int_{s_0}^{s} (1 - \sigma k(u))\, du.$$

Το μοναδιαίο εφαπτόμενο $\vec{t}$ της C_σ ως προς τη μη φυσική παράμετρο s είναι:

$$\vec{t}_\sigma = \frac{C_\sigma'}{\|C_\sigma'\|} = \frac{\frac{dC_\sigma}{ds}}{\left\| \frac{dC_\sigma}{ds} \right\|} = \frac{\cancel{(1-\sigma k(s))}\, \vec{t}(s)}{\cancel{(1-\sigma k(s))}} = \vec{t}(s) = \vec{t}$$

και $\vec{n}_\sigma = J \vec{t}_\sigma = J \vec{t} \Rightarrow \vec{n}_\sigma = \vec{n}$

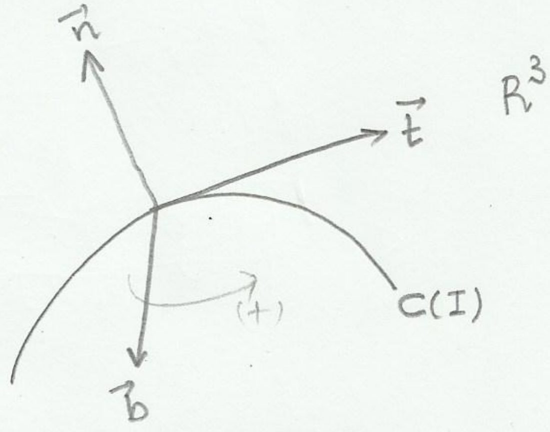
$$\frac{d\vec{t}_\sigma}{ds_\sigma} = k_\sigma \cdot \vec{n}_\sigma \Leftrightarrow \frac{ds}{ds_\sigma} \cdot \frac{d\vec{t}}{ds} = k_\sigma \cdot \vec{n} \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{ds_\sigma}{ds}} \cdot \frac{d\vec{t}}{ds} = k_\sigma \cdot \vec{n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-\sigma k} \cdot \dot{\vec{t}} = k_\sigma \cdot \vec{n} \Rightarrow \frac{1}{1-\sigma k} \cdot k \cdot \vec{n} = k_\sigma \cdot \vec{n} \Rightarrow k_\sigma = \frac{k}{1-\sigma k}.$$

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω καμπύλη $c: I\subset \mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ με παράμετρο το μήκος τόξου s και καμπυλότητα $k(s)>0$ $\forall s\in I$. Εάν $\langle c(s), \vec{n}(s)\rangle = 0$ $\forall s\in I$, τότε να αποδειχθεί ότι $\frac{\tau}{k}$ είναι γραμμική συνάρτηση.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Έστω $\{\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\}$ ορθομοναδιαία βάση στον χώρο $\mathbb{R}^3$, τότε

$$c(s) = a_1 \vec{t}(s) + a_2 \vec{n}(s) + a_3 \vec{b}(s)$$

πολλαπλασιάζουμε εσωτερικά με $\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)$

$$\left.\begin{array}{l} \langle c(s), \vec{t}(s)\rangle = a_1 \\ \langle c(s), \vec{n}(s)\rangle \overset{0}{=} a_2 \\ \langle c(s), \vec{b}(s)\rangle = a_3 \end{array}\right\} c(s) = \underbrace{\langle c(s), \vec{t}(s)\rangle}_{\varphi(s)} \vec{t}(s) + \underbrace{\langle c(s), \vec{b}(s)\rangle}_{\psi(s)} \vec{b}(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c(s) = \varphi(s)\vec{t}(s) + \psi(s)\vec{b}(s) \overset{\varphi,\psi}{\underset{\text{λείες}}{\Rightarrow}}$$

$$\Rightarrow \dot{c}(s) = \dot{\varphi}(s)\vec{t}(s) + \varphi(s)\dot{\vec{t}}(s) + \dot{\psi}(s)\vec{b}(s) + \psi(s)\dot{\vec{b}}(s)$$

$$\overset{k(s)>0}{\Rightarrow} \vec{t}(s) = \dot{\varphi}(s)\vec{t}(s) + \varphi(s)k(s)\vec{n}(s) + \dot{\psi}(s)\vec{b}(s) - \psi(s)\tau(s)\vec{n}(s)$$

$$\Rightarrow \vec{t}(s) = \dot{\varphi}(s)\vec{t}(s) + \big(\varphi(s)k(s) - \psi(s)\tau(s)\big)\vec{n}(s) + \dot{\psi}(s)\vec{b}(s)$$

Τότε

$$\begin{cases} ① & \dot{\varphi}(s) = 1 \Rightarrow \varphi(s) = s + c_2 \\ ② & \varphi(s)k(s) - \psi(s)\tau(s) = 0 \\ ③ & \dot{\psi}(s) = 0 \Rightarrow \psi(s) = c_1 \neq 0 \ (\text{διότι εάν } \psi(s)=0 \overset{②}{\Rightarrow} \varphi(s)=0 \ (\text{↯})) \end{cases}$$

Έτσι η ② είναι:

$$\frac{\tau(s)}{k(s)} = \frac{\varphi(s)}{\psi(s)} = \frac{s+c_2}{c_1} = \frac{1}{c_1}\cdot s + \frac{c_2}{c_1}$$ γραμμική συνάρτηση.

ΘΕΜΑ 5ο

Νδο μία καμπύλη είναι επίπεδη, εάν το εγγύτατο επίπεδο (δηλ. το επίπεδο που σχηματίζουν τα $\vec{t}, \vec{n}$) στο τυχόν σημείο της, διέρχεται από σταθερό σημείο

ΛΥΣΗ

Έστω καμπύλη στο χώρο $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με παράμετρο το μήκος τόξου s. Θδο $\tau(s)=0$

Το εγγύτατο επίπεδο έχει μορφή στο τυχόν x:

$< x_0 - x, \vec{b} > = 0$ όπου x_0 το σταθερό σημείο που διέρχεται για κάθε $s \in I$. Διαφορίζοντας, έχουμε ότι:

$< x_0 - x, \dot{\vec{b}} > = 0 \Rightarrow \tau < x_0 - x, \vec{n} > = 0$

Έστω ότι $(\exists s_0 \in I): \tau(s_0) \neq 0 \Rightarrow \tau(s) \neq 0, s \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$

τότε $< x_0 - x, \vec{n} > = 0, \forall s \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$

Άρα, $(x_0 - x) \perp \vec{n} \Rightarrow (x_0 - x) \parallel \vec{t}$.

Δηλαδή $\exists$ $k = k(s)$ συνάρτηση τ.ω. $\forall s \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$

$x_0 - x = k\vec{t} \Leftrightarrow x_0 = x + k\vec{t} \rightsquigarrow x_0$ τομή των εφαπτομένων ευθειών της καμπύλης.

Αλλά τότε το τμήμα καμπύλης στο $(s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$ θα είναι ευθεία που αυτό αντίκειται στον περιορισμό μας ότι $\tau(s) \neq 0, s \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$

Άρα, $\tau(s) = 0, \forall s \in I$